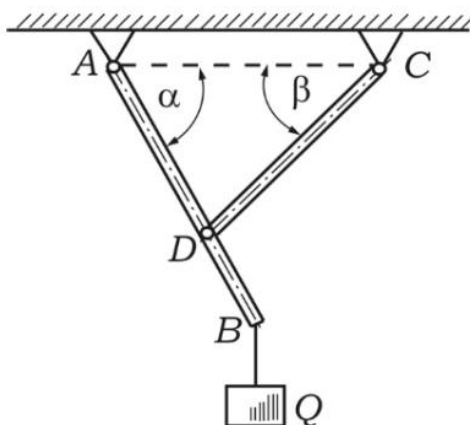


MEHANIKA

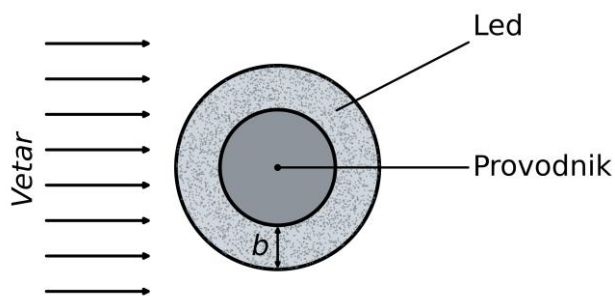
1. Dva štapa AB i CD zglobno su vezana u tački D cilindričnim zglobovom (koga se oslobađamo sa dve sile reakcije). U tačkama A i C štapovi su učvršćeni za horizontalnu tavanicu pomoću cilindričnih zglobova. Težine štapa su iste i iznose $G = 500 \text{ N}$. Na kraj štapa AB okačen je teret težine $Q = 2000 \text{ N}$. Odrediti reakcije veza u zglobovima A, C i D ako je $AB = AC = 1 \text{ m}$, $CD = 0,897 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 45^\circ$.



2. Bakarni provodnik (uže) nadzemnog voda je montiran između fiksnih tačaka vešanja A i B, koje se nalaze na istom horizontalnom pravcu, na udaljenosti $AB = 120 \text{ m}$. Montaža je izvršena tako da je pri temperaturi provodnika $t_{min} = -20^\circ \text{C}$, bez dodatnog opterećenja, naprezanje u provodniku $\sigma_{tmin} = 0,8 \cdot 10^8 \text{ Pa}$.

Pri temperaturi provodnika $t_L = -5^\circ \text{C}$ na provodnik se ravnomerno nahvatao led debljine $b = 5 \text{ mm}$. Pri ovakvom stanju proračunati maksimalnu brzinu vetra v , koji duva normalno na trasu voda, tako da provodnik ne bude mehanički preopterećen.

Parametri užeta su: $A = 50 \text{ mm}^2$, $\gamma = 8,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$, $E = 11 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $\sigma_d = 10^8 \text{ Pa}$, $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ \text{C}$. Aerodinamički koeficijent užeta (sa ledom) je $c = 0,7$. Gustina vazduha je $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Gustina leda je $\rho_L = 600 \text{ kg/m}^3$. Pretpostaviti da se led hvata ravnomerno na provodnik kao što je prikazano na slici.



3. Analizira se PVC cev $\overline{AB} = L = 3 \text{ m}$, kružnog prstenastog poprečnog preseka, $D = 2,6 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$. Cev leži u horizontalnom položaju između dva oslonca A i B. Proračunati maksimalni mehanički napon u cevi i maksimalni ugib cevi za slučaj:

- da je cev prazna;
- da se u cev uspe $0,3 \text{ kg}$ vode.

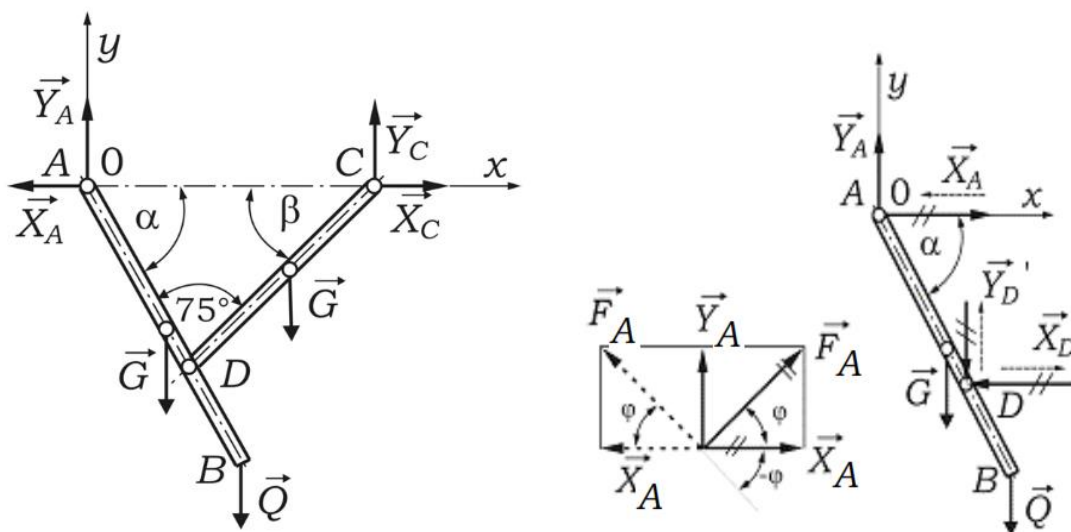


Parametri cevi su: $\sigma_d = 8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, $E = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$.

Napomena: Ispit traje 3 sata. Studenti koji su položili kolokvijum rade zadatak 3 i jedan od preostala dva zadatka po izboru. Ostali studenti rade sve zadatke. Potrebno je na svakom zadatku ostvariti minimalno 30% poena i zbirno minimalno 50% ukupnog broja poena.

MEHANIKA
Rešenja zadataka

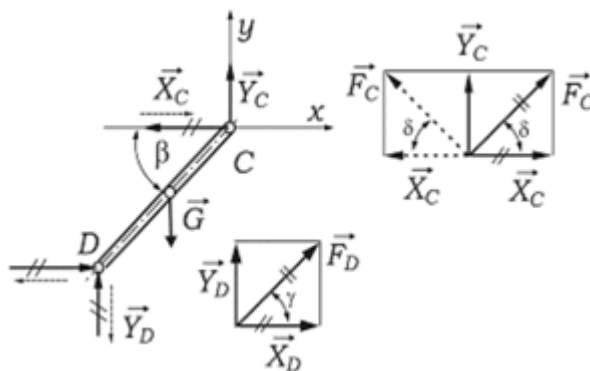
1.



Posmatrajući štap AB mogu se napisati sledeći SUR:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow X_A - X_{D'} = 0 \\ \sum Y = 0 &\rightarrow Y_A - Y_{D'} - G - Q = 0 \\ \sum M_O = 0 &\rightarrow -G \frac{AB}{2} \cos \alpha + X_D AD \sin \alpha - Y_D AD \cos \alpha - Q AB \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

Posmatrajući štap CD mogu se napisati sledeći SUR:



$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow X_D - X_C = 0 \\ \sum Y = 0 &\rightarrow Y_C - Y_D - G = 0 \\ \sum M_C = 0 &\rightarrow G \frac{CD}{2} \cos \beta + X_D CD \sin \beta - Y_D CD \cos \beta = 0 \end{aligned}$$

Takođe važi:

$$\begin{aligned} Y_{D'} &= Y_D \\ X_{D'} &= X_D \end{aligned}$$

Prema sinusnoj teoremi važi:

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 75^\circ} \rightarrow AD = AC \frac{\sin \beta}{\sin 75^\circ} = 0,73m$$

Rešenje sistema, rezultati, su:

$$\begin{aligned}
X_A &= X_D = X_C = -1218,03N \\
Y_D &= -968,08N \\
Y_C &= -468,07N \\
Y_A &= 1531,97N
\end{aligned}$$

2. Ugib užeta na temperaturi $t = -5^\circ\text{C}$ bez dodatnog opterećenja:

$$\begin{aligned}
f^3 - [0,0827 + 0,0918 \cdot (t + 20)]f - 7,864 &= 0 \Rightarrow f_{-5}^3 - 1,46f_{-5} - 7,864 = 0 \\
\Rightarrow f_{-5} &= 2,232 \text{ m}
\end{aligned}$$

Parametar dužine užeta na toj temperaturi:

$$(2L_0 - 2l) = \frac{f_{-5}^3 - \frac{3\gamma l^4}{4E}}{\frac{3}{4}l \cdot f_{-5}} = \frac{2,232^3 - \frac{3 \cdot 8,9 \cdot 10^4 \cdot 60^4}{11 \cdot 10^{10}}}{\frac{3}{4} \cdot 60 \cdot 2,232} = 0,0324 \text{ m}$$

Maksimalna dozvoljena ekvivalentna specifična težina (za $\sigma_{nd} = \sigma_d = 10^8 \text{ Pa}$):

$$\begin{aligned}
f_{L+v}^3 - \frac{3}{4}l(2L_0 - 2l)f_{L+v} - \frac{3\gamma_{ekv}l^4}{4E} &= 0 \Rightarrow \\
\left(\frac{\gamma_{ekv}l^2}{2\sigma_{nd}}\right)^3 - \frac{3}{4}l(2L_0 - 2l)\left(\frac{\gamma_{ekv}l^2}{2\sigma_{nd}}\right) - \frac{3\gamma_{ekv}l^4}{4E} &= 0 \\
\gamma_{ekv} &= \sqrt{\frac{6\sigma_{nd}^3}{l^3}\left(\frac{2L_0 - 2l}{2\sigma_{nd}} + \frac{l}{E}\right)} = \sqrt{\frac{6 \cdot (10^8)^3}{60^3}\left(\frac{0,0324}{2 \cdot 10^8} + \frac{60}{11 \cdot 10^{10}}\right)} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^3 \\
\Rightarrow q_{ekv} &= \gamma_{ekv}A_0 = 1,4 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 7 \text{ N/m}
\end{aligned}$$

Geometrija provodnika sa ledom:

$$\begin{aligned}
D_0 &= \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} = 7,98 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; D = D_0 + 2b = 17,98 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\
A_L &= \frac{\pi}{4}(D^2 - D_0^2) = 2,04 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2
\end{aligned}$$

Podužne težine provodnika i leda:

$$q_0 = \gamma A_0 = 4,45 \text{ N/m} ; q_L = \gamma_L A_L = \rho_L g A_L = 1,22 \text{ N/m}$$

Dozvoljena podužna sila pritiska vetra:

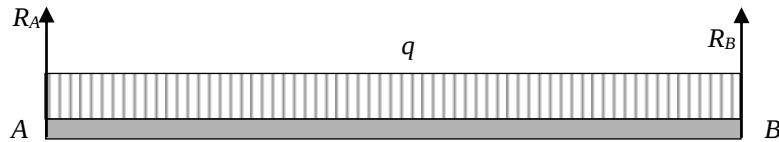
$$q_v = \sqrt{q_{ekv}^2 - (q_0 + q_L)^2} = \sqrt{7^2 - 5,67^2} = 4,12 \text{ N/m}$$

Maksimalna brzina vetra:

$$q_v = 0,5 \cdot c \cdot \rho \cdot v^2 \cdot D \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_v}{c \cdot \rho \cdot D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,12}{0,7 \cdot 1,2 \cdot 17,98 \cdot 10^{-3}}} = 23,3 \text{ m/s}$$

Maksimalna dozvoljena brzina vetra je $v \approx 23,3 \text{ m/s}$ ($\approx 84 \text{ km/h}$).

3. Greda je opterećena na savijanje usled sopstvene težine q :



Proračun težine grede:

$$Q = mg = \rho Vg = \rho L \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} g = 9,1 \text{ N}.$$

$$q = \frac{Q}{L} = 3,04 \text{ N/m}.$$

Proračun reakcija oslonaca:

$$R_A = R_B = \frac{Q}{2} = 4,55 \text{ N}$$

Jednačina momenata savijanja grede:

$$M(z) = R_A \cdot z - \frac{qz^2}{2}.$$

Maksimalni moment savijanja:

$$M_{\max} = M(L/2) = \frac{qL^2}{8} = 3,42 \text{ Nm}.$$

Maksimalni mehanički napon u cijevi:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = 3,047 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$W_x = \frac{\pi D^3 \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right)}{32} = 11,215 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

Jednačina elastične linije:

$$Bu''(z) = -M(z) = -R_A z + \frac{qz^2}{2}$$

$$Bu(z) = -\frac{R_A z^3}{6} + \frac{qz^4}{24} + C_1 z + C_2$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

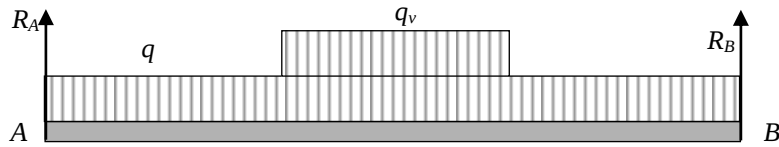
$$u'(L/2) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

$$u(L/2) = \frac{1}{B} \frac{5qL^4}{384} \approx 11 \text{ cm}$$

$$B = EI_x = 29,16 \text{ Nm}^2$$

b) Kada se u cijev uspe voda ona će popuniti centralni deo cevi u dužini:

$$L_v = \frac{4m_v}{\rho_v \pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,3}{1000 \pi \cdot 0,02^2} = 0,955 \text{ m} \approx L/3 = 1 \text{ m}$$



Podužna težina vode u cevi je:

$$q_v = \frac{Q_v}{L_v} = \frac{3}{1} = 3 \text{ N/m} \approx q$$

Proračun reakcija oslonaca:

$$R_A = R_B = \frac{Q + Q_v}{2} = 6,05 \text{ N}$$

Jednačina momenata savijanja grede:

$$M(z) = R_A \cdot z - \frac{qz^2}{2} \Big|_{z=L/3} - \frac{q_v(z-L/3)^2}{2} \Big|_{z=2L/3} + \frac{q_v(z-2L/3)^2}{2} \Big|_{z=2L/3}$$

Maksimalni moment savijanja:

$$M_{\max} = M(L/2) = 5,325 \text{ Nm}$$

Maksimalni mehanički napon u cijevi:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = 4,748 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Jednačina elastične linije:

$$Bu''(z) = -M(z) = -R_A \cdot z + \frac{qz^2}{2} \Big|_{z=L/3} + \frac{q(z-L/3)^2}{2} \Big|_{z=2L/3} - \frac{q(z-2L/3)^2}{2} \Big|_{z=2L/3}$$

$$Bu(z) = -\frac{R_A \cdot z^3}{6} + \frac{qz^4}{24} + C_1 z + C_2 \Big|_{z=L/3} + \frac{q(z-L/3)^4}{24} \Big|_{z=2L/3} - \frac{q(z-2L/3)^4}{24} \Big|_{z=2L/3}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$u'(L/2) = 0 \Rightarrow C_1 = 5,06 \text{ Nm}^2$$

$$u(L/2) \approx 16,56 \text{ cm}$$